京都大学理学部物理第一教室

K-dV方程式の2-ソリトン解に対する弱い散逸の影響について

田　中　光　宏

Kortweg-de Vries 方程式 (K-dV) のソリトン間の相互作用に対して，弱い散逸効果が及ぼす影響を，2-ソリトンの場合に限って調べた。

以下では，弱い散逸を含むK-dVとして，

$$u_t - 6\,u\,u_x + u_{xxx} = \varepsilon R(u)$$

$$R(u) = -u \ \cdots \ \textbf{(Case 1)}\ ;\ R(u) = u_{xx} \ \cdots \ \textbf{(Case 2)}$$

の2種類を考察する。ε は正の微小パラメーターである。

逆散乱法により，K-dV のソリトンと，K-dVの解をポテンシャルに持つ Schrödinger 方程式

$$-\varphi_{xx} + u\,\varphi = \lambda\varphi$$

の束縛状態とは 1：1 に対応している事が知られており，またソリトン振幅とエネルギー固有値との密接な関係を考えれば，ソリトン振幅の振舞を知るには，エネルギー固有値の時間変化を知る必要がある事がわかる。

2-ソリトン解に対応する2つの束縛状態のエネルギー固有値は次の式で支配される。

$$d\lambda_i/dt = \varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} R(u)\,\varphi_i^2\,dx \qquad (\,i = 1,\ 2\,)$$

λ_1，λ_2 は負である。また，大きい方のソリトンが λ_1 に対応するとする。($|\lambda_1|>|\lambda_2|$)
φ_i は λ_i に属する規格化された固有関数である。$\varepsilon = 0$，すなわち K-dV の場合は，固有値は時間によらない。

1-ソリトンの時の固有値の振舞とのずれは，

$$d(\triangle\lambda_i)/dt = \varepsilon\left[\int_{-\infty}^{\infty} R(u)\,\varphi_i^2\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} R(u_i)\,\varphi_i^{(0)2}\,dx\right]$$

で表される。ここで，u_i は束縛状態 i に対応する1- ソリトン解であり，$\varphi_i^{(0)}$ は，その時の i に属する固有関数である。

最低次の効果は，[ ]内の量をすべて，$\varepsilon = 0$ の時，すなわち K-dV の量で評価することによって得られる。(任意の時刻における，K-dV の 2-ソリトン解及び付随する2つの固有関数は解析的に解かれている。) [ ]内の量は，2つのソリトンが衝突する

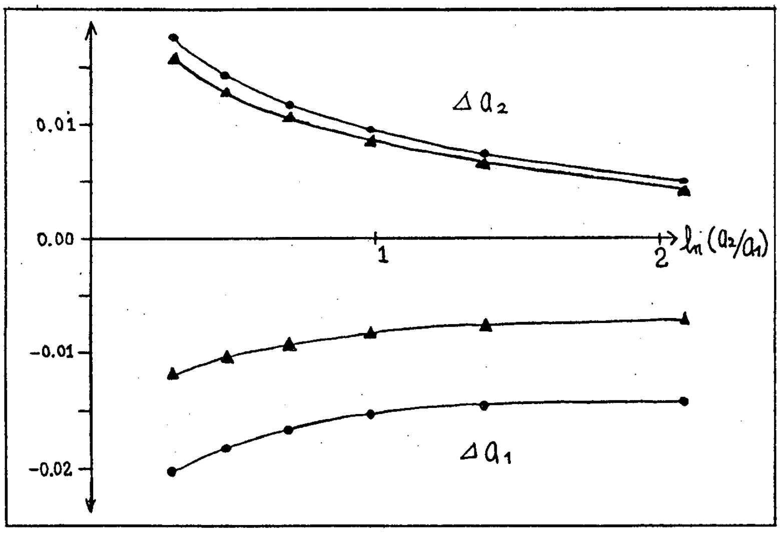

図 1 (Case 1) $\varepsilon = 0.02$

(●: 摂動論
▲: 数値計算)

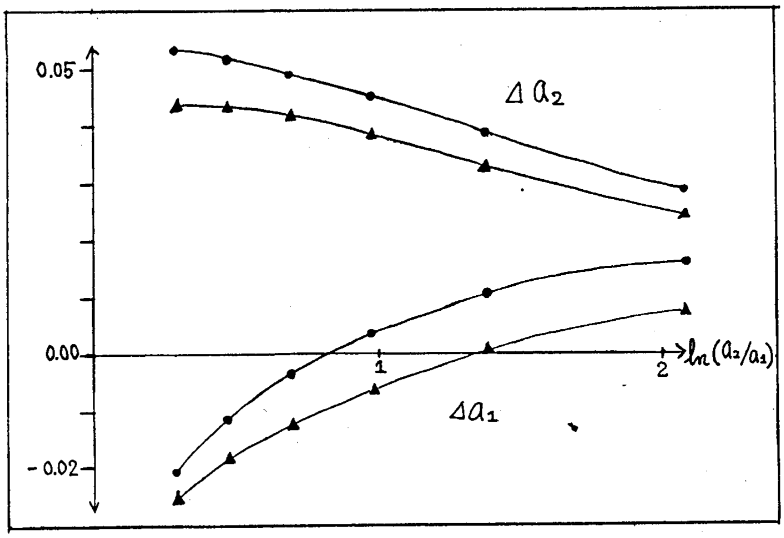

図 2 (Case2) $\varepsilon = 0.02$

(●: 摂動論
▲: 数値計算)

時刻付近でのみ，ゼロでない値を取るので，それを積分した$\triangle\lambda_i$，従ってそれに比例する$\triangle a_i$は，最終的にある有限な一定値を持つ。これより，衝突後，再び２つの独立したソリトンとなった時の，２つのソリトンの振幅と，それぞれ一方だけがある時，すなわち1-ソリトンの時の減衰則から予期される振幅の間に，ある有限のずれが生じる事が予測される。

以上のようにして評価した$\triangle a_i$を，２つのソリトンの振幅比に対してプロットしたのが図１(Case 1)，図２(Case 2)である。この図からわかるように，Case 1 では，大きいソリトンはすべての振幅比において，衝突後に，1-ソリトンの減衰から予測されるよりも大きくなって表われ，逆に小さい方は，1-ソリトンからの予測よりも小さくなって表われる。また，振幅が近くなる程，このような効果は大きくなる。一方，Case 2 では，大きい方のソリトンに関しては，ほぼ Case 1 と同様だが，小さい方は，振幅比がある値より大きくなると，Case 1 の場合と逆に，1-ソリトンからの予測よりも大きくなって表われるようになると予想される。

以上で考慮したすべての場合について，差分法で数値実験した結果も図１，図２にあわせて示した。数値的には良い一致とは言い難いが，しかしながら，定性的には，摂動計算の最低次だけで非常によく現象を記述していると言えると思う。

Reference

V. I. Karpman; E. M. Maslov: Perturbation Theory for Solitons. Soviet Phys. JETP **46** (1977), 281–91

S. Watanabe: Soliton and Generation of Tail in Nonlinear Dispersive Media with Weak Dissipation. J. Phys. Soc. Jap. **45** (1978), 276–82

B-Z反応系における混沌相

津　田　一　郎

「非平衡開放系」は平衡状態と異なる種々の現象を有するという事において大変魅力に富む分野である。非平衡開放系に特有の秩序の形成は空間的一様な場合には時間的対